

# 超声速尾涡的稳定性分析<sup>1)</sup>

魏明骏 孙德军 尹协远

(中国科学技术大学力学和机械工程系, 合肥 230026)

吴介之

(美国田纳西大学空间研究院, TN37388, USA)

**摘要** 从 N-S 方程出发, 通过正则模方法, 研究了超声速尾涡的绝对 / 对流不稳定性性质. 计算了流动的稳定性特征随马赫数  $M$ , 周向波数  $n$ , 轴向自由流速度  $W_0$  和旋转度  $q$  等流动参数的变化规律, 找到了绝对 / 对流不稳定区域的边界. 通过比较发现, 马赫数的增加使流动由绝对不稳定向对流不稳定乃至稳定转化. 在所计算的参数范围, 周向波数的增加加速了这一转化过程, 而且, 轴向速度的增加, 同样使流动向着稳定的方向转化. 同时还分析了不同旋拧程度的流动受可压缩影响的不同. 这些结果对于了解旋拧流动稳定性的物理机理以及进行流动控制都有着重要意义.

**关键词** 绝对 / 对流不稳定性, 可压缩尾涡, 旋拧流, 超声速混合, Chebyshev 谱配置法

## 引 言

众所周知, 超声速下混合效率降低, 如何增强超声速混合是研制超燃发动机的一个关键问题. 近年来国际学术界认为流向涡的形成是增强超声速混合的一个有效途径. 旋拧流 (swirling flow) 是产生流向涡最方便的一种方法. 因此, 研究旋拧流的稳定性是寻找增强混合技术的一项基础性研究.

不可压缩尾涡的稳定性已经有了许多系统的研究. 早在 1964 年 Batchelor<sup>[1]</sup> 就给出了飞机尾涡剖面的相似性解. Lessen 等<sup>[2]</sup> 利用这一相似解进行了时间稳定性分析. 以后, Mayer 等<sup>[3]</sup> 用谱方法完整地研究了它的稳定性特性, 给出了中性边界. 最近, 对于尾涡的研究在以下两个方面更加深入: 一是研究不可压尾涡的绝对 / 对流不稳定性<sup>[4~6]</sup>; 二是考虑可压缩性的影响, 研究尾涡的时间稳定性随马赫数的变化<sup>[7]</sup>.

一个合乎逻辑的发展是研究可压缩性对尾涡绝对 / 对流不稳定性的影响. 然而迄今尚无这方面工作公开发表. 因此, 本文将在考虑可压缩性和粘性的环境下, 致力于尾涡的绝对 / 对流不稳定性的研究.

## 1 控制方程和边界条件

从柱坐标系  $(r, \theta, z)$  下的 N-S 方程出发, 假设基本流动是轴对称柱状的, 即仅与  $r$  坐标有关, 对其进行线性小扰动, 则利用正则模方法可将扰动量写成 Fourier 分量的形式

$$(v_r, v_\theta, v_z, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\rho}) = (U, V, W, \Pi, \eta, \rho) + (F, G, H, P, T, \delta) \exp[i(\alpha z + n\theta - \omega t)] \quad (1)$$

1998-06-01 收到第一稿, 1998-12-22 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目和中美两国基金委国际合作项目资助.

这里,  $v_r, v_\theta, v_z, \tilde{p}, \tilde{T}$  和  $\tilde{\rho}$  分别表示速度的三个分量、压力、温度和密度;  $U, V, W, \Pi, \eta$  和  $\rho$  为基本流的相应物理量;  $F, G, H, P, T, \delta$  为仅与  $r$  有关的扰动本征函数;  $\alpha$  是轴向波数,  $n$  是周向波数,  $\omega$  是角频率. 将 (1) 式代入 N-S 方程, 减去基本流满足的方程, 并略去二阶及以上小量, N-S 方程就化为了以扰动本征函数表示的线性化控制方程. 在化简的过程中, 还用到了理想气体状态方程, 并将所有与密度有关的量用温度和压力量表示出来. 最后得到的方程与 Khorrami<sup>[8,9]</sup> 的结果是一致的. 但值得注意的是, 本文在研究时间不稳定性时,  $\alpha$  为非负实数,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  为复数; 而在研究绝对 / 对流不稳定性时,  $\alpha$  与  $\omega$  均为复数. 参数 Khorrami 等<sup>[8~10]</sup> 和 Batchelor<sup>[11]</sup> 的方法给出边界条件, 在远场

$$F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = T(\infty) = P(\infty) = 0 \quad (2)$$

在  $r = 0$  处

$$\left. \begin{aligned} \text{if } n = 0, & \quad F(0) = G(0) = 0, \quad H'(0) = T'(0) = P'(0) = 0 \\ \text{if } n = \pm 1, & \quad F(0) + inG(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad H(0) = T(0) = P(0) = 0 \\ \text{if } |n| > 1, & \quad F(0) = G(0) = H(0) = T(0) = P(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

利用 Chebyshev 谱配置法<sup>[10]</sup>, 可将控制方程离散. 离散后的控制方程与边界条件一起构成了一个广义本征值问题  $D\mathbf{x} = \omega E\mathbf{x}$ . 这里,  $D$  和  $E$  是系数矩阵,  $\mathbf{x}$  是本征矢量,  $\mathbf{x} = \{F, G, H, P, T\}^T$ . 通过 QZ 方法求解这一问题, 得到离散的色散关系  $\omega = \omega(\alpha)$ . 从这一关系中, 可以分析得到流动的稳定性性质.

至于绝对 / 对流不稳定性的概念及其算法, 读者请参阅有关文献<sup>[12~14]</sup>.

## 2 基本流场

采用的基本流场为可压缩尾涡的相似解, 其推导方法及无量纲特征量与 Stott 等<sup>[7]</sup> 一样, 得到的无量纲基本流场如下

$$U = 0, \quad V = \frac{q}{r}(1 - \exp(-r^2)), \quad W = W_0 - \exp(-r^2), \quad \rho = 1, \quad \Pi = 1/\gamma M^2, \quad \eta = 1 \quad (4)$$

应注意, 这里特征速度取的是对称轴线上的轴向速度亏损  $W_s^* = W^*(\infty) - W^*(0)$  ( $*$  代表有量纲量). 因此,  $q$  是一个和最大周向速度与轴向速度亏损之比有关的量, 它可以度量旋转的大小. 马赫数定义为轴向速度亏损与无穷远声速之比 ( $M = W_s^*/a_\infty^*$ ). 实际上, 对这一基本流的推导, 只有在大马赫数时有效<sup>[7]</sup>. 因此, 在后面的计算中, 所取马赫数均满足  $M \geq 2$ .

## 3 计算结果和分析

首先, 为了验证计算程序的可靠性和精度, 我们计算了无粘条件下的时间模态. 作为与 Stott<sup>[7]</sup> 所算结果的对比, 轴向速度采用  $W = \exp(-r^2)$ , 选取  $\gamma = 1.4$ ,  $Pr = 0.73$ ,  $q = 0.8$ ,  $M = 3$ , 分别对  $n = -1$ ,  $n = -2$ ,  $n = -3$  进行计算, 结果如图 1. 与 Stott 等<sup>[7]</sup> 不同的是, 他们对不同模态分别计算, 而本文计算的是不同  $\alpha$  下所有模态中最不稳定的一个. 但我们仍可发现二者对照得很好.

本文的重点是计算 Batchelor 尾涡的绝对 / 对流不稳定性. 采用式 (4) 中基本流场, 并选取  $\gamma = 1.4$ ,  $Re = 1000$ ,  $Pr = 0.73$  进行了详细的计算. 从下面的结果中, 可以清楚地看出马赫数

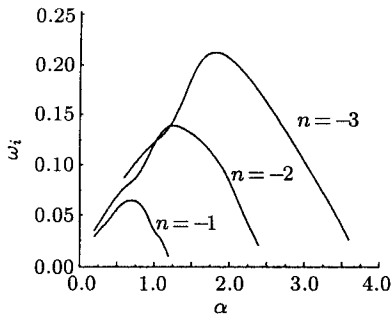


图 1  $M = 3$  时, 不同周向波数下时间增长率随  $\alpha$  的变化  
 Fig.1 Variation of temporal growth rate with  $\alpha$  at different azimuthal wavenumber,  $M = 3$

$M$ , 旋拧度  $q$ , 轴向自由流速度  $W_0$  及其他一些重要参数对绝对 / 对流不稳定性性质的影响. 其中作为对比的不可压缩流动 ( $M = 0$ ) 的结果来源于文献 [4].

从图 2 中可以看出轴向速度的变化对流动的绝对 / 对流不稳定性性质有着很强的影响. 可压缩和不可压缩流动中均体现出这一点. 特别地, 在图 2(b) 中可以看出, 对于可压缩流动, 当  $W_0$  为  $0.8 \sim 0.9$  时, 图中的大部分区域为绝对不稳定的; 随着轴向自由流速度增加, 绝对不稳定区缩小; 直到  $W_0 = 1.1$ , 图中已经没有绝对不稳定区了. 这时, 无论流动是否加上旋拧, 流动都是对流不稳定或稳定的.

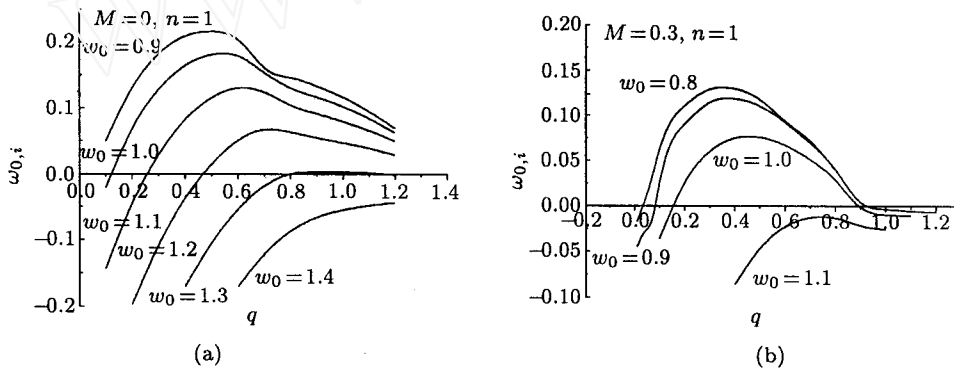


图 2 轴向速度变化对绝对增长率的的影响  
 Fig.2 Effect of axial velocity on absolute growth rate

图 3 显示了在不同马赫数下, 流动性质随周向波数的变化. 当周向波数从  $n = 1$  增加时, 流动逐渐由绝对不稳定向对流不稳定过渡. 这一趋势在马赫数较低时, 还不太明显. 例如, 当  $M = 0$  和  $M = 2$  时,  $n = 1$  与  $n = 2$  模态的绝对 / 对流不稳定性性质没有明显变化. 而到高马

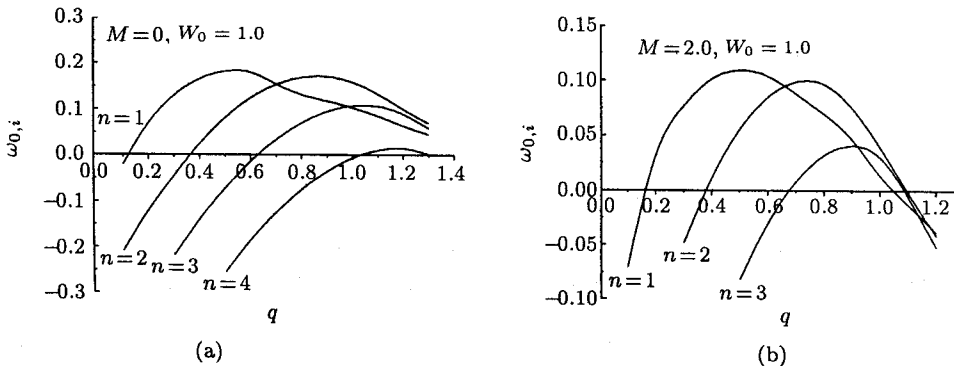


图 3 周向波数  $n$  对绝对增长率的的影响  
 Fig.3 Effect of azimuthal wavenumber  $n$  on absolute growth rate

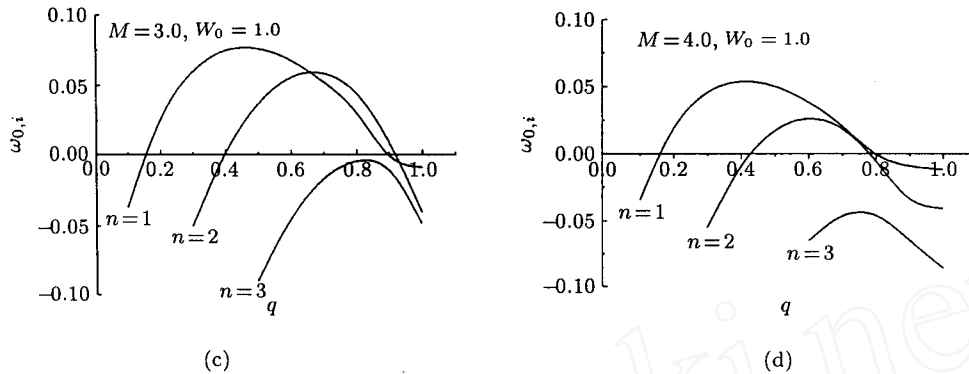


图 3 周向波数  $n$  对绝对增长率的影晌 (续)  
Fig.3 Effect of azimuthal wavenumber  $n$  on absolute growth rate

赫数 ( $M = 3, 4$ ) 时, 这一变化趋势加快.

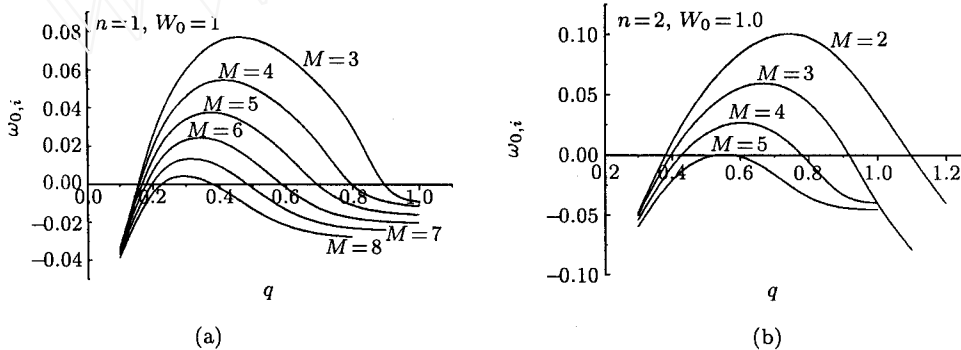


图 4 可压缩性对绝对增长率的影晌  
Fig.4 Effect of compressibility on absolute growth rate

图 4 清楚地给出了可压缩性对绝对 / 对流不稳定的影响. 在不同的周向波数 ( $n = 1, 2$ ) 下, 都可以看出随马赫数的增大, 流动明显地从绝对不稳定向对流不稳定转变. 可压缩性使流动变得更加稳定.

为了进一步看清可压缩性和旋拧对流动的绝对 / 对流不稳定性的影响, 在  $M-q$  平面找到了一个绝对不稳定区和对流不稳定区的边界, 如图 5. 图中显示出,  $n = 1$  时有最大的绝对不稳定区域, 随周向波数  $n$  的增加, 绝对不稳定性区域减小. 同时, 马赫数的影响也很明显: 当马赫数增加时, 绝对不稳定区域逐渐减小, 直至消失.

从增加超声速混合的观点来看, 增加可压缩性减少了扰动的增长率, 也即减少了混合效

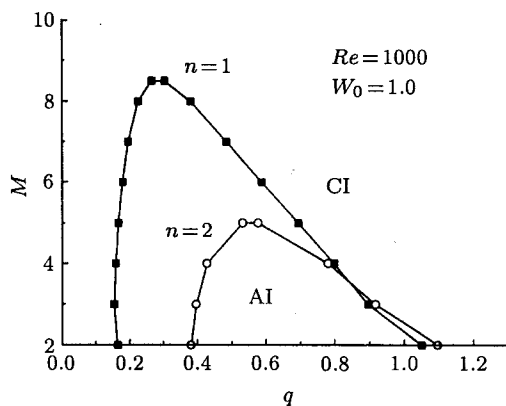


图 5  $M-q$  平面上对流不稳定性和绝对不稳定性的边界  
Fig.5 The boundary between convective instability and absolute instability on  $M-q$  plane

率, 这无论对于平面混合层还是射流或迹都是不争的事实. 本文的目的是想研究在相同的马赫数条件下 (如在超燃发动机工况下) 如何尽量提高混合效率, 也就是要找出在什么样的组合下:

(1) 流动是绝对不稳定的; (2) 有最大的绝对增长率  $\omega_{0,i}$ . 从本文结果可以定性地看出, 这要求: (1) 轴向速度应是亏损型的 (背景流速应大于燃料流速); (2) 中等旋拧度  $q$ , 即  $0.2 \leq q \leq 0.5$ ; (3) 小周向波数. 在这些参数组合下, 可以得到最大的绝对增长率. 这些结果对于研究超燃发动机中的超声速混合具有指导意义.

#### 4 结 论

本文运用正则模分析的方法, 以 Batchelor 尾涡为例研究了轴对称旋拧流的绝对 / 对流不稳定性性质. 从粘性可压缩 N-S 方程出发, 首次研究了可压缩性对流动的绝对 / 对流不稳定性性质的影响规律, 发现: 随马赫数的增加, 流动由绝对不稳定向对流不稳定转变, 进而演变为稳定的流动. 另外, 还仔细分析了轴向自由流速度  $W_0$ , 周向波数  $n$  和旋拧度  $q$  对流动稳定性的影响. 得出的绝对 / 对流不稳定性边界, 具有清晰的物理意义和重要的实用价值.

致谢 童秉纲院士作为中美两国基金委国际合作项目的中方负责人, 一直关心和指导了本研究工作的进行. 在此表示诚挚的感谢.

#### 参 考 文 献

- 1 Batchelor GK. Axial flow in trailing line vortices. *J Fluid Mech*, 1964, 20: 645~658
- 2 Lessen M, Singh PJ, Paillet F. The stability of a trailing line vortex, Part 1. Inviscid theory. *J Fluid Mech*, 1974, 63: 753~763
- 3 Mayer EW, Powell KG. Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex. *J Fluid Mech*, 1992, 245: 91~114
- 4 Yin XY (尹协远), Sun DJ (孙德军), Sun MY (孙明宇), et al. The AI/CI characters of trailing vortex and vortex breakdown. UTSI Report 98-01. Tullahoma: University of Tennessee Space Institute, 1998. 1~18
- 5 Olendraru C, Sellier A, Rossi M, et al. Absolute/convective instability of the Batchelor vortex. *C R Acad Sci Paris*, 1996, 323(IIB): 153~159
- 6 Delbende I, Chomaz J, Huerre P. Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response. *J Fluid Mech*, 1998, 335: 229~254
- 7 Stott AK, Duck PW. The stability of a trailing-line vortex in compressible flow. *J Fluid Mech*, 1994, 269: 323~351
- 8 Khorrani MR. Stability of a compressible swirling jet. AIAA paper 91-1770, 1991. 1~12
- 9 Khorrani MR. Stability of a compressible axisymmetric swirling jet. *AIAA J*, 1995, 33: 650~658
- 10 Khorrani MR, Maik MR, Ash RL. Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *J Comput Phys*, 1989, 81: 206~229
- 11 Batchelor GK, Gill AE. Analysis of the stability of axisymmetric jets. *J Fluid Mech*, 1962, 14: 529~551
- 12 孙德军. 钝体尾迹的稳定性分析及控制. [博士论文]. 合肥: 中国科技大学, 1995. 1~119 (Sun Dejun. Stability analysis and control of wakes behind bluff bodies. [Ph D thesis]. Hefei: University of Science and Technology of China, 1995, 1~119 (in Chinese))
- 13 孙德军, 尹协远, 童秉纲. 静止圆柱尾迹的稳定性分析. 空气动力学学报, 1997, 15(1): 66~72 (Sun Dejun, Yin Xieyuan, Tong Binggang. Stability analyses of wakes behind a stationary circular cylinder. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1997, 15(1): 66~72 (in Chinese))
- 14 孙德军, 尹协远, 童秉纲. 钝体尾迹稳定性研究及流动控制探讨. 空气动力学学报, 1997, 15(1): 73~80 (Sun Dejun, Yin Xieyuan, Tong Binggang. On stability analyses of wakes behind bluff bodies and flow control. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1997, 15(1): 73~80 (in Chinese))

## STABILITY ANALYSIS ON SUPERSONIC TRAILING-LINE VORTEX <sup>1)</sup>

Wei Mingjun      Sun Dejun      Yin Xieyuan

(*Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

Wu Jiezhi

(*The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, TN37388, USA*)

**Abstract** In recent years there has been a great deal of interests in the stability of swirling flows. It is because of not only the significance to the enhancement of supersonic mixing but also the important applications to many practical flows such as the trailing-line vortices behind an aircraft. The absolute/convective instability of incompressible swirling flows and the temporal instability of compressible swirling flows have been fully explored, whereas the absolute/convective instability of compressible swirling flows remains unclear. In this paper, the absolute/convective instability of a supersonic trailing-line vortex is studied for the first time. The normal mode method is applied to linearized N-S equations for disturbances. The obtained stability equations are solved by the Chebyshev spectral collocation method combined with the QZ algorithm to give the complex dispersion relation  $\omega = \omega(\alpha)$ , where  $\alpha$  is complex axial wave number and  $\omega$  is complex frequency. The absolute growth rate  $\omega_{0,i}$  is the imaginary part of  $\omega$  at the point with vanishing group velocity  $d\omega/dk = 0$ . Various stability characteristics of the flow along with the variation of Mach number  $M$ , azimuthal wave number  $n$ , axial free velocity  $W_0$  and swirling ratio  $q$  are obtained. Like incompressible case, the axial velocity strongly influence the absolute/convective instability of supersonic trailing-line vortex. The absolute growth rate is largest when there is a reverse flow ( $W_0 = 0.8$ ), and reduces more quickly than incompressible case as axial velocity deficit decreases ( $W_0$  increases). The flow is less unstable and changes from absolute unstable to convectively unstable or even stable as Mach number increases. Also, the absolute growth rate reduces as azimuthal wave number increases from  $n = 1$ , and this tendency is more appreciable at higher Mach numbers. The boundary between absolutely unstable region and convectively unstable region on the  $M$ - $q$  plane is given. It shows that the swirl can significantly enhance the absolute growth rate only in certain range of swirling ratio  $q = 0.2 \sim 0.5$ . All these results are significant to the investigation of enhancement of supersonic mixing.

**Key words** absolute/convective instability, compressible trailing-line vortex, swirling flow, supersonic mixing, Chebyshev spectral collocation method

Received 1 June 1998, revised 22 December 1998.

<sup>1)</sup> The project supported by the National Natural Science Foundation of China and International Cooperation Program between the National Natural Science Foundation of China and the National Science Foundation of the United States.